Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist $\mathcal{A}$-messbar.

(ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$: $\{f \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$: $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(iv) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$: $\{f \leqslant \alpha\} \in \mathcal{A}$.

(v) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$: $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{R}}$ eine Folge von Maßen auf $\mathcal{A}$ sowie $(a_n)_{n\mathbb{N}} \subset [0, \infty]$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition vom Integral, dass

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\Omega f \mathrm{d}\mu_n$$

für alle $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar ist.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und δ_ω das Dirac-Maß. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\delta_\omega = f(\omega)$$

für alle messbaren Funktionen f auf Ω.

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Wir betrachten $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und definieren auf $\mathcal{P}(\Omega)$ das Maß

$$\mu = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \delta_m$$

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(k) = k$. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\Omega f d\mu.$$

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Es sei $[0,1]$ versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,1]) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset [0,1]\}$ und dem Lebesguemaß m. Wir betrachten die messbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = 1 - x$.

(a) Finden Sie eine Folge einfacher messbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass
   - $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   - $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in [0,1]$.

(b) Berechnen Sie den Wert von

$$\int_{[0,1]} f \mathrm{d}m$$

mit Hilfe von Aufgabenteil (a).